Analysis

Ableitungsfunktionen

Ableiten mit diesen drei Regeln:

Potenzregel, Regeln für konstante Faktoren und Summen

Anwendung auf

Ganzrationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen ohne Summe im Nenner

Einfache Wurzelfunktionen

Besonders wichtig ist der Zentraltext über Ableitungen 41100

Datei 41102

Stand 30. Dezember 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem einer jeden Bibliothek ist sehr oft das Suchen und Finden eines geeigneten Textes.
Da es sehr viele Texte zu Ableitungen gibt, die zudem noch über diverse Funktionenbereiche verteilt sind, habe ich diesen „Zentraltext für Ableitungen“ angefertigt.
Er bringt eine ziemlich tief gehende Übersicht über Ableitungen von allerlei Funktionen.
Und zu jedem Thema findet man Verweise auf andere Texte, die noch mehr Übungen bereitstellen.
Außerdem folgt jetzt gleich eine Übersichtsliste aller Funktionen, in denen es um das „handwerkliche“ Ableiten geht, also nicht um deren Anwendungen.

41100	Zentraltext für Ableitungen
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen. Beweis einiger Ableitungsregeln mit der Grenzwertmethode.
41102	Hier werden nur mit der Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel ganzrationale Funktionen abgeleitet, dann gebrochen-rationale Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und ebenso einfache Wurzelfunktionen. Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet, (Dieser Text)
41103	Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, Differenzierbarkeit.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel
43016	Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von Wurzelfunktionen, auch komplizierte Funktionen.
45015	Ableitung von Exponentialfunktionen.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von Logarithmusfunktionen
47015	Ableitung von trigonometrischen Funktionen
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten) Februar 2011.

Inhalt

1. Grundregeln der Ableitungen.

Im Text 41101 wurden mit der Grenzwertmethode die folgenden Ableitungsregeln bewiesen:

1. **Potenzregel**: $\boxed{\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}}$

Beispiele: $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3 \cdot x^2$

Diese Ableitungsregel gilt für beliebige Exponenten, also natürliche Zahlen, negative ganze Zahlen, Bruchzahlen usw.

Beispiele: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. **Konstante-Faktoren-Regel**: $\boxed{\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)}$

Diese Regel besagt, dass beim Ableiten ein konstanter Faktor unberücksichtigt stehen bleibt.

Beispiele: $f(x) = 5x^3 \qquad f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$

$f(x) = \frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1} \qquad f'(x) = 5 \cdot \left(-x^{-2}\right) = -\frac{5}{x^2}$

$f(x) = 4x\sqrt{x} = 4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \qquad f'(x) = 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 6 \cdot \sqrt{x}$

3. **Summenregel**: $\boxed{\left(u(x) + v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)}$

d.h.: Jeder Summand wird für sich selbst abgeleitet.

Beispiele: $f(x) = 5x^4 - x^3 + 7x - 2$

$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 7 = 20x^3 - 3x^2 + 7$

2. Ableitung ganzrationaler Funktionen

Ausführliches Beispiel:

$$f(x)=\boxed{\tfrac{1}{2}}\cdot x^4+\boxed{4}\cdot x^3\ \boxed{-\tfrac{1}{2}}\,x^2+\boxed{4x-7}$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

$$f'(x)=\boxed{\tfrac{1}{2}}\cdot 4x^3+\boxed{4}\cdot 3x^2\ \boxed{-\tfrac{1}{2}}\cdot 2x\ +\ \boxed{4}$$

Jeder Summand wird einzeln abgeleitet und die konstanten Faktoren bleiben stehen. Auf den Summanden $4x-7$ will ich extra hinweisen: Seine Ableitung ist 4.

(Man beachte, dass $y = 4x - 7$ eine Gerade mit der Steigung 4 darstellt=

Oder so: $4x$ hat die Ableitung 4 und das Absolutglied -7 die Ableitung 0.

Weitere Beispiele:

a) $f(x)=-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\tfrac{3}{2}\cdot 2x+\tfrac{3}{4}=-3x+\tfrac{3}{4}$

b) $f(x)=\tfrac{1}{12}x^4+\tfrac{1}{6}x^3-4x^2+3x-1 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\tfrac{1}{12}\cdot 4x^3+\tfrac{1}{6}\cdot 3x^2-4\cdot 2x+3$

$f'(x)=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2-8x+3$

Für spätere Anwendungen muss man eine Ableitungsfunktion noch zweimal ableiten. Dann spricht man von der 1. Ableitung, 2. Ableitung usw.:

c) $f(x)=\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+4x-2$

1. Ableitung(sfunktion): $f'(x)=\tfrac{1}{6}\cdot 3x^2-\tfrac{3}{2}\cdot 2x+4=\tfrac{1}{2}x^2-3x+4$

2. Ableitung(sfunktion): $f''(x)=\tfrac{1}{2}\cdot 2x-3=x-3$

3. Ableitung(sfunktion): $f'''(x)=1$

d) $f(x)=-\tfrac{1}{16}x^4+\tfrac{1}{4}x^2+5$

1. Ableitung(sfunktion): $f'(x)=-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{2}x$

2. Ableitung(sfunktion): $f''(x)=-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{2}$

3. Ableitung(sfunktion): $f'''(x)=-\tfrac{3}{2}x$

Aufgabe 1

Berechne jeweils 3 Ableitungsfunktionen:

a) $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2-4x+4$

b) $f(x)=-\frac{1}{18}x^3+4x^2+6x-\sqrt{2}$

c) $f(x)=4x^4-12x^3+8x-7$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+3x^2+2x-1$

e) $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3+2x$

f) $f(x)=-\frac{4}{3}x^6+\frac{1}{2}x^4+2x^2-8$

Aufgabe 2

Berechne jeweils 1 Ableitung. Zuvor soll der Funktionsterm durch Ausmultiplizieren vereinfacht werden.

a) $f(x)=12\left(x^3-5x^2-3x+1\right)$

b) $f(x)=\frac{5}{16}\left(x^4-3x^2+8\right)$

c) $f(x)=(3x-5)\left(x^3-2x^2-8x+15\right)$

d) $f(x)=\left(x^3-8\right)\left(x^2+4x-6\right)$

3. Ableitung gebrochen-rationaler Funktionen ohne Summe im Nenner

Usw.